# Quantummechanica aan den lijve ondervinden

Woudschoten Natuurkunde Didactiek Conferentie 2006

Lodewijk Koopman[*]

AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam

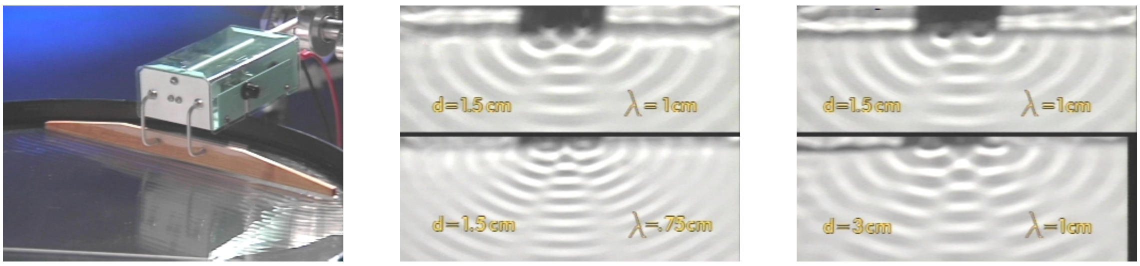
15-16 december 2006

## 1 Dubbel-spleet experiment

Er wordt wel eens gezegd dat elektronen zich als golven gedragen. Dat gaan we in deze opgave preciezer bekijken. We zoeken eerst uit hoe watergolven en licht zich gedragen. Golven waar we misschien iets vertrouwder mee zijn, dan met de golven die elektronen moeten beschrijven. Vervolgens kijken we of we onze inzichten kunnen gebruiken bij elektronen. Hiervoor maken we steeds gebruik van een dubbel–spleet experiment. Wat dat is wordt in de opdracht duidelijk.

Als ergens $\boxed{\text{docent}}$ in de kantlijn staat, bespreek dan je antwoorden op de *voorgaande* vragen eerst met de docent voor je verder gaat.

**Water** Bekijk de demo/film van het water (zie ook figuur 1).




Figuur 1: Waterbak met daarin een trillende lat die golven veroorzaakt (links) en de golven die zichtbaar zijn achter een lat met twee spleten daarin (midden en rechts).

1. Hoe wordt het verschijnsel genoemd dat in de demo en in figuur 1 zichtbaar is? Beschrijf het patroon dat zichtbaar wordt achter de twee spleten.

2. Wat verandert er aan het patroon wanneer we a) de spleetafstand groter/kleiner maken, b) de golflengte van het water groter/kleiner maken?

[*]lkoopman@science.uva.nl

3. Hoe kun je het patroon verklaren dat achter de twee spleten zichtbaar wordt?

We gaan het patroon dat achter de twee spleten zichtbaar is wiskundig proberen te verklaren/beschrijven. Hiervoor nemen we aan dat de golven die uit de twee spleten komen cirkelvormig en in fase zijn. De uitwijking van zo'n golf wordt beschreven door:

$$u(r,t) = u_0 \cos(kr - \omega t),$$

waarbij $k = 2\pi/\lambda$ het golfgetal is met $\lambda$ de golflengte en $\omega = 2\pi f$ de hoekfrequentie met $f$ de frequentie. $u_0$ is de amplitude van de golf. De afstand van de oorsprong van de golf tot een bepaald punt in de bak wordt gegeven door $r$.

4. Leg uit dat de uitdrukking voor $u(r,t)$ inderdaad een cirkelvormige golf beschrijft.

5. Welke kant beweegt de golf op?

   **Hint:** Maak een schets van de golf als functie van $r$, waarbij je de tijd op nul zet: $t = 0$. Maak nog een schets van de golf, maar nu op een tijdstip later; kies bijvoorbeeld $\omega t = \pi/2$.

Om te kunnen controleren of de aanname van cirkelvormige golven beschreven door de functie $u(r,t)$ goed werkt, moeten we berekenen hoe het patroon er uit ziet op basis van zulke golven en dit vergelijken met het waargenomen patroon. Noem de golf die uit spleet 1 komt $u_1$ en de golf die uit spleet 2 komt $u_2$. De uitwijking van het water achter de twee spleten noemen we $u_{\text{patroon}}$.

6. Hoe hangt $u_{\text{patroon}}$ af van $u_1$ en $u_2$?

7. Het patroon dat we in figuur 1 zien, en dus ook $u_{\text{patroon}}$, is twee-dimensionaal. Dat is lastig uit te rekenen en moeilijk uit te zetten in een grafiek. Wat zouden we makkelijker uit kunnen rekenen en in een grafiek weergeven om te vergelijken met figuur 1?

docent

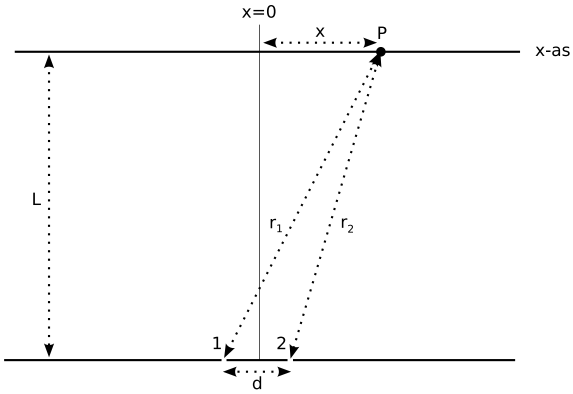
8. Probeer nu een uitdrukking voor $u_{\text{patroon}}$ te vinden met behulp van je keuze uit het vorige onderdeel.

   **Hint:** Bedenk dat we nu twee golven hebben die elk cirkelvormig zijn vanuit een ander punt. De algemene uitdrukking voor een golf $u(r,t)$ kun je dus niet zomaar gebruiken. Gebruik de coördinaten zoals weergegeven in figuur 2 en 3. Verder kun je gebruiken dat

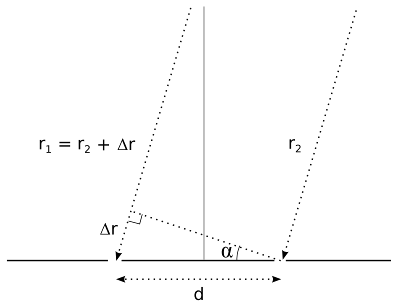
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

   Omdat we ook aannemen dat $\alpha$ klein is, mag je gebruiken: $\tan\alpha \approx \sin\alpha$.

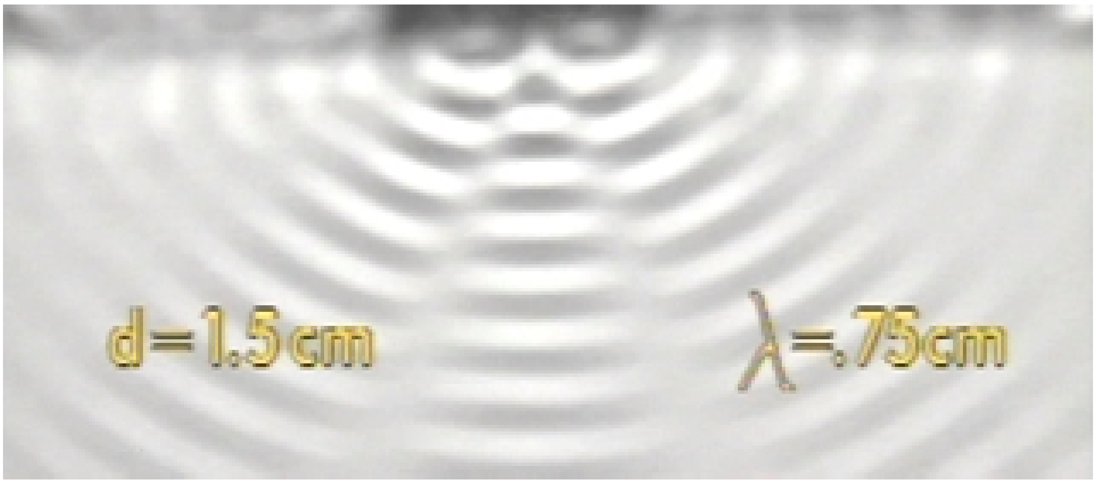
9. We kunnen de gevonden uitdrukking voor $u_{\text{patroon}}$ voor verschillende tijden in een grafiek zetten. Als we deze grafieken achter elkaar weergeven krijgen we een soort filmpje. Wat verwacht je te zien? Vraag aan de docent het filmpje te laten zien. Beschrijf wat je ziet: wat blijft constant in de tijd en wat verandert er? Kun je op basis van de uitdrukking voor $u_{\text{patroon}}$ begrijpen wat je ziet? Bespreek hoe dit filmpje overeenkomt met het experiment.




Figuur 2: Schematische tekening van de opstelling van de dubbel–spleet.




Figuur 3: Detail van de opstelling van de dubbel–spleet.



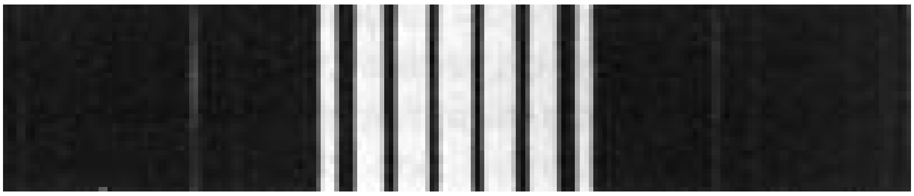

Figuur 4: Detail van interferentiepatroon uit figuur 1, met $d = 1.5$ cm en $\lambda = 0.75$ cm. De foto is op ware grootte afgebeeld.

10. De golven bewegen op en neer in de tijd. Wat is de maximale uitwijking (amplitude) voor iedere plaats? Laat zien dat dit gelijk is aan:

$$A(x) = 2u_0 \left| \cos\left(\frac{dk}{2L}x\right) \right| .$$

11. Bereken op basis van de uitdrukking voor $A(x)$ hierboven wat de afstand is tussen de twee eerste minima. Komt het overeen met het plaatje in figuur 4? Zo niet: kun je het verschil verklaren?

$\boxed{\text{docent}}$ **Licht** We bekijken nu een zelfde soort opstelling als die in de vorige opgave, maar nu voor licht. Een dergelijk experiment is voor het eerst uitgevoerd door Young, waarover hij in 1804 publiceerde, zie bijvoorbeeld `http://www.cavendishscience.org/phys/tyoung/tyoung.htm`, of Scheider (1986). Wanneer licht met één bepaalde kleur (monochromatisch) op een dubbel–spleet valt, zien we op een scherm achter



Figuur 5: Lichtpatroon dat zichtbaar is achter een dubbelspleet.

de dubbel–spleet een patroon zoals dat in figuur 5. In deze opgave proberen we te begrijpen hoe dit patroon ontstaat door te gebruiken wat we voor de opgave met water hebben uitgezocht.

1. Vergelijk het patroon uit figuur 5 met het patroon voor water (figuur 1). Zijn de figuren zomaar te vergelijken? Beschrijf de overeenkomsten en verschillen. Wat neem je waar (wat meet je) in het geval van water en wat neem je waar in het geval van licht. Is dat hetzelfde, of niet?

2. Het patroon van licht en donker doet denken aan het patroon dat we bij water hebben gezien. We zouden daarom kunnen aannemen dat er ook nu twee golven uit de spleten komen die beschreven worden door een vergelijking analoog aan die bij water. Wat golft er nu en kun je dat waarnemen?

3. Ga na in hoeverre we de resultaten van de vorige opgave kunnen gebruiken. Wat is op basis hiervan de uitwijking van de golf ter hoogte van het scherm (hoef je niet opnieuw uit te rekenen)? Bereken ook nu weer de afstand tussen de maxima. Gebruik daarbij dat $\lambda = 633$ nm, $d = 0.2$ mm en $L = 6$ m.

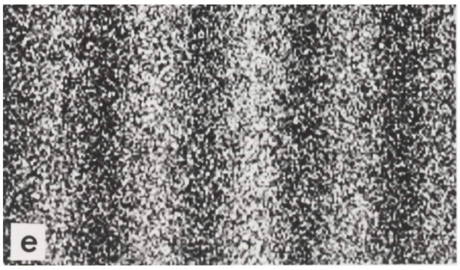
4. De vraag is nu wat je precies ziet ter hoogte van het scherm en of dat hetzelfde is als de uitwijking die we berekend hebben. Geef een argument voor en tegen dat we de uitwijking van de golf zien.

docent **Elektronen** Tot slot bekijken we wat er gebeurt wanneer een bundel elektronen gericht wordt op een dubbel–spleet. Zo'n experiment is voor het eerst uitgevoerd in 1961 door Jönsson (1961), voor een vertaling hiervan zie Jönsson (1974). In figuur 6 is het patroon te zien dat voor elektronen zichtbaar wordt wanneer ze door een dubbel–spleet worden gestuurd.

1. Vergelijk het patroon uit figuur 6 met dat voor water en licht. Wat zijn de overeenkomsten en verschillen?

2. We zouden het patroon voor elektronen nu ook kunnen beschrijven analoog aan dat voor water en licht. Schrijf de uitdrukking op voor de uitwijking die je ter hoogte van het scherm verwacht. Is dit ook wat je waarneemt? Zo niet: wat neem je dan wel waar?

3. Welk verband zou er kunnen bestaan tussen de amplitude (maximale uitwijking) en de waargenomen elektronen?



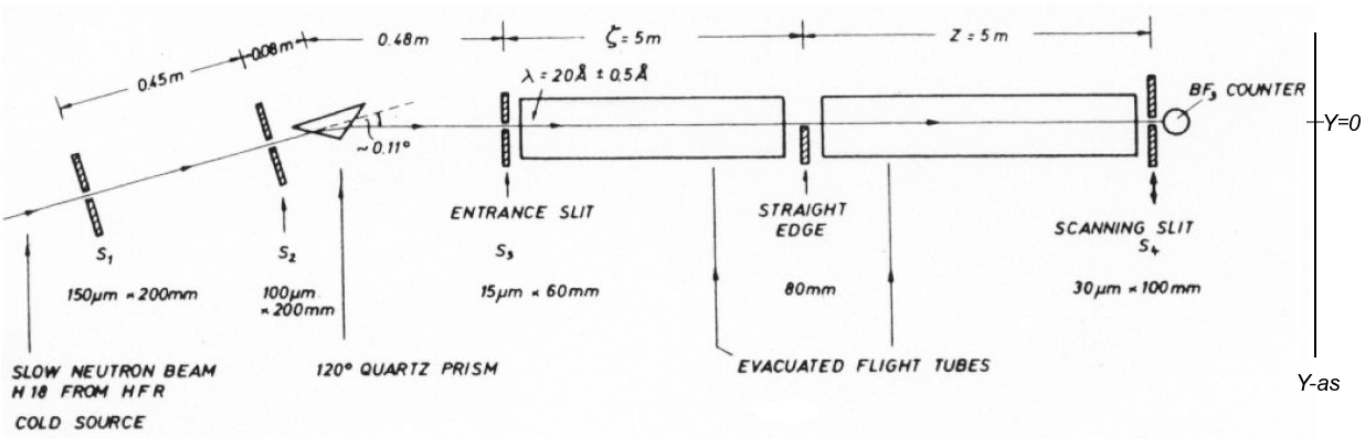

Figuur 6: Patroon van 70.000 elektronen achter een dubbel–spleet. Afbeelding afkomstig uit Tonomura et al. (1989).

# 2 Neutronen langs een rechte rand

docent

In de vorige opgave hebben we gezien dat de deeltjesdichtheid die we achter het scherm waarnemen een stijgende functie moet zijn van de uitwijking van de golf. Laten we eerst eens kijken naar de vorm $|u|^a$, waarbij in principe $a > 0$. We weten echter niet welke waarde deze $a$ moet hebben. Daarvoor bekijken we het volgende experiment. Dit keer is er gewerkt met neutronen in plaats van elektronen, maar we nemen aan dat elektronen hetzelfde gedrag laten zien. Andersom laten neutronen hetzelfde gedrag zien als de elektronen in het vorige experiment. Onderstaand experiment staat beschreven in Zeilinger, Gaehler, Shull en Treimer (1982).

Een bundel neutronen wordt op een rechte rand afgevuurd (de *straight edge* in figuur 7), zodanig dat de helft van de bundel tegen de rand komt en de helft van de bundel erlangs gaat. Achter de rand wordt op verschillende plaatsen gemeten




Figuur 7: Opstelling van het experiment met de neutronen. De *scanning slit* (uiterst rechts) wordt gebruikt om op een bepaalde positie langs de $Y$-as gedurende een bepaalde tijd het aantal neutronen te meten dat daar terecht komt.

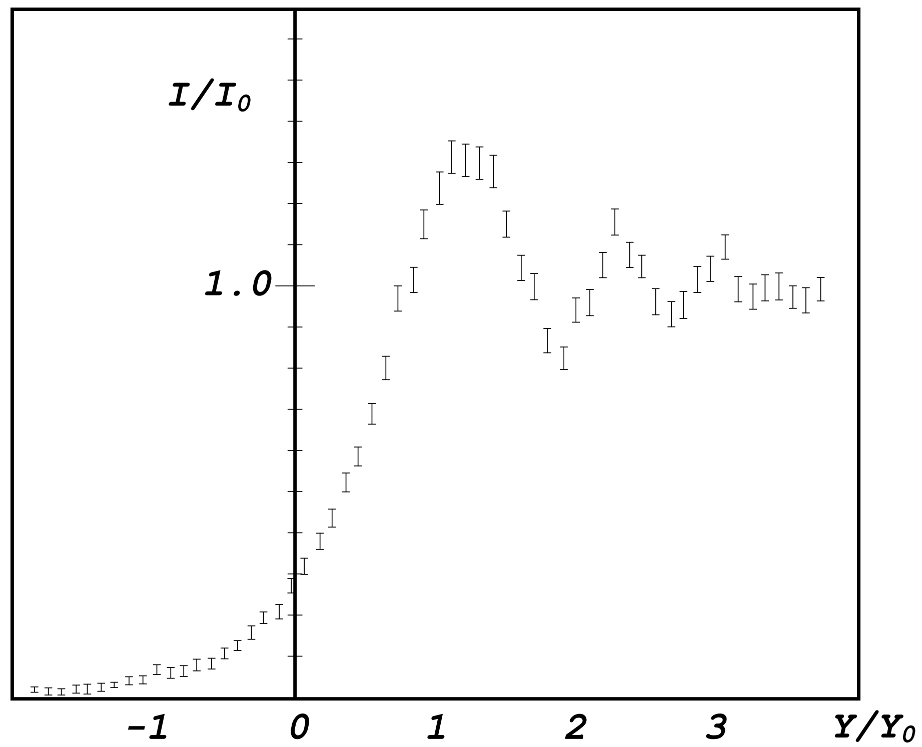
hoeveel neutronen er terecht komen.

1. Beredeneer hoe je, analoog aan de opgave van de dubbel–spleet, zou kunnen bepalen wat de uitwijking van de golf is ter hoogte van de detector (de *scanning slit* in figuur 7)? Probeer dit in woorden uit te drukken.

2. Hoe groot denk je dan dat de amplitude (maximale uitwijking) is van de golf precies in het midden van opstelling, recht achter de rand? Noem de amplitude die je verwacht zonder rand $A_0$.

3. Zie nu figuur 8. Op de verticale as staat het aantal gedetecteerde neutronen $I$ als verhouding van het aantal neutronen dat zonder rand gemeten zou zijn ($I_0$). Op de horizontale as staat de positie van de detector: $Y/Y_0 = 0$ is recht achter de rand, $Y/Y_0 < 0$ is achter de rand en $Y/Y_0 > 0$ is in de bundel ($Y_0 = 100$ $\mu$m). De neutronen zijn gemeten door steeds voor een vaste tijd de detector op een andere locatie langs de $Y$-as te zetten.

   Wat is het aantal gemeten neutronen in het midden achter de rand voor $Y/Y_0 = 0$? Wat is het verband tussen dit aantal en de (veronderstelde) amplitude op het punt $Y/Y_0 = 0$?




Figuur 8: Gemeten intensiteit van neutronen achter de plaat.

4. Welk algemeen verband verwacht je dat er bestaat tussen de amplitude en het aantal gemeten neutronen?

# 3 Interpretatie van de golffunctie

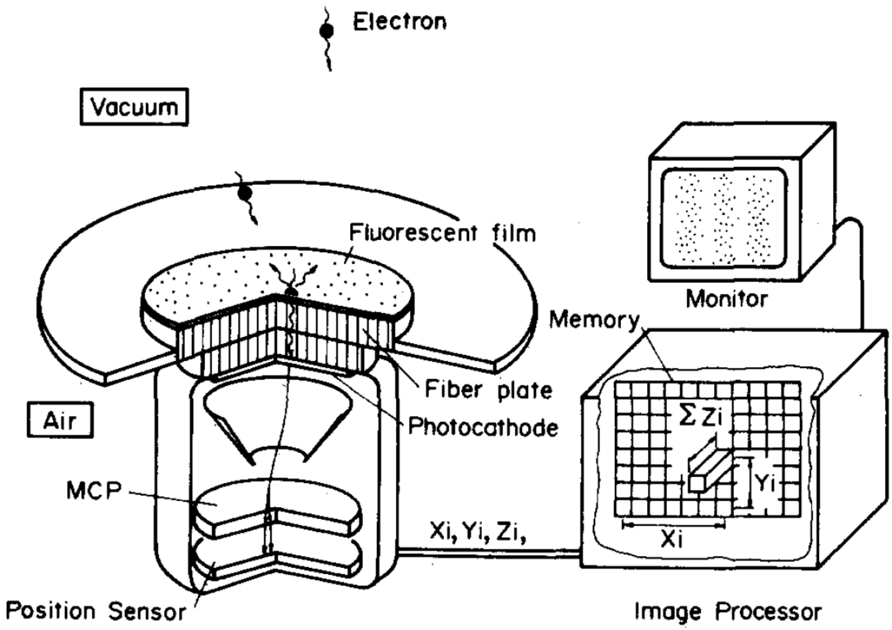
docent In de vorige opgave hebben we interferentiepatronen van water, licht en elektronen bekeken. Het interferentiepatroon van elektronen was gemaakt door een bundel elektronen op een dubbel–spleet te richten. In deze opgave bekijken we preciezer hoe het patroon van elektronen wordt opgebouwd. We bekijken daarvoor een experiment uitgevoerd door Tonomura et al. (1989). Er is weer een dubbel–spleet, maar nu worden er heel weinig elektronen afgevuurd: 1000 per seconde. De elektronen worden versneld door een spanning van $V_0 = 50$ kV.

1. 1000 elektronen per seconde lijkt veel, maar deze elektronen gaan ook erg hard. Om te kijken of het ook veel is, berekenen we hoeveel afstand er tussen twee elektronen zit.

   Hoeveel tijd zit er tussen twee elektronen? Welke snelheid hebben de elektronen? Dus wat zou hun afstand zijn als ze ongehinderd kunnen voortbewegen?

   **Hint**: de kinetische energie van de elektronen wordt bepaald door de spanning $V_0$ waarmee ze versneld worden.

Een detector meet waar de elektronen terecht komen en stuurt dit signaal door naar een monitor waar op de juiste plaats een stipje verschijnt (zie figuur 9).




Figuur 9: Schematische opstelling van het dubbel–spleet experiment met elektronen. De positie van elektronen wordt gemeten en uiteindelijk doorgestuurd naar een monitor.

Van het beeld van de monitor is een video gemaakt: `http://www.hqrd.hitachi.co.jp/em/movie/doubleslite.wmv`. De video toont slechts een deel van de monitor en laat alleen bepaalde fragmenten in de tijd zien. Het laatste fragment is na ongeveer 20 minuten gemaakt. Vraag de docent de video te tonen en beantwoord vervolgens de volgende vragen:

2. Wat valt je op aan de manier waarop het patroon wordt opgebouwd?

3. Welke aspecten van wat je in de film ziet kunnen we verklaren door de golffunctie uit de opgave over interferentie?

4. Bij water zeggen we wel dat de watergolven interfereren en een interferentiepatroon geven. Geef aan in hoeverre je dat hier wel/niet kunt zeggen.

5. In welke zin zegt de golffunctie iets over één individueel elektron?

6. Er wordt wel eens gesproken over de golf–deeltje dualiteit in de quantummechanica. Zou je op basis van de opgaven over interferentie daar iets over kunnen zeggen?

# 4 Verwijzingen

Deze opdracht en de bijbehorende filmpjes/plaatjes zijn beschikbaar op mijn website: `www.science.uva.nl/~lkoopman/woudschoten.html`.

Eerder zijn twee artikelen voor conferenties verschenen over mijn promotie onderzoek. Deze zijn ook op mijn website te vinden:

- Koopman, L. (2005). *Understanding Student Difficulties in First Year Quantum Mechanics Courses.* `http://www.science.uva.nl/~lkoopman/download/EPECpaper.pdf`.(paper gepresenteerd tijdens EPEC 2005)

- Koopman, L., Kaper, W., & Ellermeijer, A. (2006). *Learning Quantum Mechanics through Experience.* `http://www.science.uva.nl/~lkoopman/download/GIREPpaper.pdf`. (paper gepresenteerd tijdens GIREP 2006)

# Literatuur

Jönsson, C. (1961). Elektroneninterferenzen an mehreren kunstlich hergestellten feinspalten. *Zeitschrift für Physik*, *161*, 454.

Jönsson, C. (1974). Electron diffraction at multiple slits. *American Journal of Physics*, *42*(1), 4–11.

Scheider, W. (1986). Bringing one of the great moments of science to the classroom. *The Physics Teacher*, *24*(4), 217-219.

Tonomura, A., Endo, J., Matsuda, T., Kawasaki, T. en Ezawa, H. (1989). Demonstration of single-electron build-up of an interference pattern. *American Journal of Physics*, *57*, 117-120.

Zeilinger, A., Gaehler, R., Shull, C. G. en Treimer, W. (1982, September). Experimental status and recent results of neutron interference optics. *AIP Conf. Proc.*, *89*(1), 93–100.

# Mogelijke antwoorden

Dit zijn niet *de* antwoorden, maar een voorbeeld van wat mogelijk is (beknopt opgeschreven).

**Dubbel–spleet experiment: water**

1. Het verschijnsel heet interferentie. Het patroon kenmerkt zich doordat er vanuit twee punten min of meer cirkelvormige golven komen. Vanuit het midden lopen lijnen te vinden waar het water niet lijkt te golven.

2. Als we de spleetafstand groter (kleiner) maken, dan komen de radiële lijnen dichter bij elkaar (verder uit elkaar) te liggen. Als we de golflengte groter (kleiner) maken, komen deze lijnen verder uit elkaar (dichter bij elkaar) te liggen.

3. Het patroon kun je als volgt verklaren. Elke spleetopening kun je zien als bron van watergolven. Achter de twee spleten tellen deze golven bij elkaar op: er zijn punten in het water waar de golven elkaar versterken, en punten waar ze elkaar juist tegen werken.

4. De uitdrukking voor $u(r,t)$ beschrijft een cirkelvormige golf, omdat voor vaste $r$ (dus op een cirkel met straal $r$) de uitwijking constant is.

5. Als we de tijd $t$ toeneemt, moeten we $r$ ook laten toenemen, om een constant argument van de cosinus te krijgen. We kijken dan als het ware naar een vast punt op de golf. De golf loopt dus van binnen naar buiten. Dit wordt in een grafiekje ook duidelijk (hier niet getekend). Voor kleine stapjes $\Delta t$, zien we de grafiek van $u(r,t)$ naar rechts lopen. Dat komt overeen met 'van binnen naar buiten' (bedenk dat $r$ de straal is).

6. $u_{\text{patroon}} = u_1 + u_2$, dat komt overeen met ons eerdere antwoord: "de golven tellen bij elkaar op".

7. We kunnen uitrekenen wat de uitwijking is op een afstand $L$ van de dubbel–spleet op een lijn parallel aan die dubbel–spleet.

8. We gebruiken ten eerste: $u_{\text{patroon}} = u_1 + u_2$ en verder: $u_1 = u_1(r_1,t)$, $u_2 = u_2(r_2,t)$. Dit geeft met de regel voor het optellen van cosinussen:

$$\begin{aligned} u(r_1,r_2,t) &= u_1(r_1,t) + u_2(r_2,t), \\ &= u_0\cos(kr_1 - \omega t) + u_0\cos(kr_2 - \omega t), \\ &= 2u_0\cos\left(\frac{kr_1 + kr_2 - 2\omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{kr_1 - kr_2}{2}\right), \\ &\approx 2u_0\cos(kr - \omega t)\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right). \end{aligned}$$

   In de laatste stap gebruikten we: $r_1 \approx r_2 \approx r$, waarbij $r$ de afstand is van het midden van de twee spleten tot een punt $P$ op het scherm. Verder: $r_1 - r_2 \approx$

$\Delta r$. De benadering bestaat uit de aanname dat $r_1$ en $r_2$ parallel zijn; we kijken dus naar het geval dat de hoek $\alpha$ klein is.

Nu kunnen we gebruiken:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+L^2}, \\ \Delta r &= d\sin\alpha, \\ &\approx d\tan\alpha, \\ &= d\frac{x}{L}. \end{aligned}$$

Als we dit invullen krijgen we tenslotte:

$$u(x,t) = 2u_0 \cos(k\sqrt{x^2+L^2} - \omega t) \cos\left(\frac{kd}{2L}x\right).$$

9. Voor een vaste $x$, zal de eerste cosinus in de tijd van -1 naar 1 lopen (als we lang genoeg wachten). Dus de eerste cosinus is als een amplitude die in de tijd verandert. De tweede cosinus is onafhankelijk van de tijd: dat is het statische beeld van het interferentiepatroon.

10. Zie vorige antwoord. Voor een vaste $x$ is de maximale uitwijking dus:

$$2u_0 \left|\cos\left(\frac{kd}{2L}x\right)\right|.$$

11. De afstand tussen de eerste twee minima kan gevonden worden door de nulpunten rond $x = 0$ van bovenstaande cosinus te vinden. Daarvoor geldt $\frac{kd}{2L}x = \pm\frac{\pi}{2}$. Dus $x = \pm\frac{\pi L}{kd}$. De afstand is dan: $\Delta x = \frac{2\pi L}{kd}$.

**Dubbel–spleet: licht**

1. We zien plaatsen van afwisselend licht en donker, op een regelmatige afstand van elkaar. Dat lijkt op wat we bij water zien: wel en geen golfslag. Bij het water bekijken we het golfpatroon van boven. Bij licht kijken we naar het licht dat op een scherm terecht komt. Dit is dus niet direct hetzelfde.

2. Het licht is een elektromagnetische golf: dus het elektrisch en magnetisch veld golft. Dat nemen we niet waar: we nemen het licht zelf waar, dus wel/geen trilling van de elektromagnetische golf.

3. De afleiding uit de vorige opgave is direct te gebruiken, als we aannemen dat we nu ook weer met cirkelvormige golven te maken hebben. De uitdrukking voor de uitwijking is (net als bij water):

$$u(x,t) = 2u_0 \cos(k\sqrt{x^2+L^2} - \omega t) \cos\left(\frac{kd}{2L}x\right).$$

De afstand tussen de maxima wordt (net als bij water) gegeven door:

$$\Delta x = \frac{2\pi L}{kd} = \frac{2\pi 6 \text{ m } 633 \text{ nm}}{2\pi \ 0.2 \text{ mm}} = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

4. Argument voor: de uitwijking vertoont ook maxima en minima. Argument tegen: de uitwijking kan ook negatief zijn, op het scherm zien we een lichtintensiteit (die groter of gelijk aan nul is).

**Dubbel–spleet: elektronen**

1. De patronen voor licht en elektronen lijken heel erg op elkaar; we kijken weer op een scherm en zien banden met licht en donker. Bij de elektronen zien we nu echter stipjes.

2. We nemen gewoon de uitdrukking die we vonden bij water over:

$$u(x,t) = 2u_0 \cos(k\sqrt{x^2+L^2} - \omega t) \cos\left(\frac{kd}{2L}x\right).$$

   De uitwijking van de golf zelf nemen niet waar: we nemen elektronen waar.

3. Het aantal elektronen (per oppervlak) dat we waarnemen moet een monotoon stijgende functie van de maximale amplitude zijn; hoe groter te amplitude, hoe meer elektronen.

**Neutronen langs een rechte rand**

1. Bij de dubbel–spleet telden de twee golven uit de twee spleten bij elkaar op. Nu hebben we niet één spleet, maar als het ware een hele reeks spleten aaneengeschakeld: elk punt is een spleet waar vanuit een cirkelvormige golf ontstaat. Die tellen allemaal op.

2. Met een rechte rand in de opstelling zijn er de helft minder bronnen (zie vorig antwoord). Dus de amplitude recht achter de rand is dan $\frac{1}{2}A_0$.

3. Recht achter de rand worden ongeveer $I = 0.25I_0$ neutronen gemeten. Het verband tussen $I$ en $A$ lijkt dan te zijn: $I = A^2$.

4. Algemeen zou je verwachten dat het verband tussen de amplitude van de golf en de dichtheid van de neutronen wordt gegeven door $I = A^2$.

**Interpretatie van de golffunctie**

1. De elektronen hebben een kinetische energie van $E_{\text{kin}} = eV_0$. Omdat algemeen $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$, geldt voor de snelheid van de elektronen: $v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$. De tijd tussen de elektronen is $\Delta t = 1/1000$ s, dus de afstand is:

$$\Delta x = v\Delta t = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}\Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\ 50\ \text{kV}}{9.1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}\ 1/1000\ \text{s} = 130\ \text{km}$$

2. Er verschijnen één voor één elektronen op het scherm in willekeurige volgorde. Pas als er voldoende elektronen gedetecteerd zijn, kunnen we een patroon zien dat op een interferentiepatroon lijkt.

3. Het patroon kunnen we verklaren, niet waar een elektronen op het scherm terecht komt. Dus de kans het elektron ergens aan te treffen kunnen we voorspellen.

4. De elektronen interfereren niet met elkaar; daarvoor zit er te veel afstand tussen. Toch lijkt er sprake te zijn van interferentie. De golven interfereren.

5. Een golffunctie zegt alleen iets over de kans dat één elektron ergens wordt aangetroffen.

6. Er is enerzijds sprake van golfgedrag: er is een interferentiepatroon zichtbaar. Anderzijds nemen we nog steeds individuele elektronen waar.